**Endomorphismes orthogonaux – Démonstrations**

Propriété : Soient , et une base orthonormée de . On a équivalence entre :

1. est un endomorphisme orthogonal de .
2. est une matrice orthogonale.

Démonstration : ⍟

On a :

(Le 3e point vient du fait que est orthonormée, donc )

Proposition : Soit , alors

Démonstration : ⍟

Soit , alors comme est euclidien,

Alors tel que .

Alors d’une part :

Et d’autre part, donc conserve la norme, ainsi

D’où , ie

Donc

Lemme : Soit . Soit un sev de stable par , alors est aussi stable par . De plus, l’endomorphisme (resp. ) est un endomorphisme orthogonal de (resp. ) .

Démonstration : ⍟

Comme et , est bijectif donc conserve les dimensions ainsi

(cela se prouve facilement en prenant une base de , et en montrant que est libre).

On en déduit donc que .

Soit , on veut montrer que . Soit , alors

car donc ,

car donc conserve le produit scalaire.

car et .

Ainsi . D’où .

Montrons que appartient à

Soit , alors

Donc .

(On fait pareil pour l’autre)